

Calculus – Notes de cours

ABOU YASSIN Jad

Partie 1 – Formulaire

Table des matières

1 Notations usuelles en mathématiques	2
1.1 Ensembles usuels	2
1.2 Symboles usuels	2
2 Rappels de calcul algébrique	3
2.1 Priorité des opérations	3
2.2 Fractions	4
2.3 Puissances	5
2.4 Racines et puissances fractionnaires	5
3 Sommes	6
3.1 Utilisation du symbole $\sum$	6
3.2 Opérations sur les sommes	8
3.3 Sommes remarquables	10
4 Formule du binôme de NEWTON	11
4.1 Coefficients binomiaux et triangle de PASCAL	11
4.2 Binôme de NEWTON	12
5 Équations et inéquations	12
5.1 Équations du premier degré	13
5.2 Équations du second degré	13
5.3 Exponentielles et logarithmes	14
5.4 Inégalités	15
5.5 Valeur absolue	16
6 Tableaux utiles	17
6.1 Tableau des lettres grecques	17
6.2 Préfixes du Système International d'Unité	17

Chapitre 1: Notations usuelles en mathématiques

Ce chapitre regroupe quelques notations mathématiques usuelles qui seront utilisées tout au long de ce cours et des suivants.

1.1) Ensembles usuels

Voici une liste des notations utilisées pour les ensembles classiques de nombres :

Définition 1 (Ensembles de nombres usuels)

- $\mathbb{N}$: l'ensemble des entiers **naturels** $(0, 1, 2, \dots)$,
- $\mathbb{Z}$: l'ensemble des entiers **relatifs** $(\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots)$,
- $\mathbb{D}$: l'ensemble des nombres **décimaux** (de la forme $\frac{a}{10^n}$ avec $a \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}$),
- $\mathbb{Q}$: l'ensemble des nombres **rationnels** (de la forme $\frac{p}{q}$ avec $p, q \in \mathbb{Z}$ et $q \neq 0$),
- $\mathbb{R}$: l'ensemble des nombres **réels** (par exemple, π , $-\sqrt{2}$, 5 , $\frac{-1}{12}$, $\dots$),
- $\mathbb{C}$: l'ensemble des nombres **complexes** (de la forme $a + ib$ avec $a, b \in \mathbb{R}$).

On a les inclusions : $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

Si X est un des ensembles précédents (sauf $\mathbb{C}$), on note :

- X_+ l'ensemble des nombres de X qui sont **positifs ou nuls**,
- X_- l'ensemble des nombres de X qui sont **négatifs ou nuls**,
- X^* l'ensemble des nombres de X **sauf 0**.

Exemples 2

1. L'ensemble $\mathbb{Z}_+$ est l'ensemble de tous les entiers relatifs qui sont positifs ou nuls : il s'agit donc de l'ensemble de tous les nombres naturels. Donc $\mathbb{Z}_+ = \mathbb{N}$.
2. L'ensemble $\mathbb{Q}$ est décrit comme étant l'ensemble de toutes les fractions $\frac{p}{q}$ avec $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$.
3. On peut combiner ces notations : par exemple, $\mathbb{R}_+^*$ est l'ensemble de tous les nombres réels strictement positifs.

1.2) Symboles usuels

Définition 3 (Appartenance)

Le symbole $\in$ (**appartient**) dénote l'appartenance d'un élément à un ensemble, et le symbole $\notin$ (**n'appartient pas**) la non-appartenance d'un élément à un ensemble.

→ **Exemple** : Écrire « Soit $n \in \mathbb{N}^*$ » signifie « Soit n un entier naturel non nul ». On a « $\pi \notin \mathbb{Z}$ » car π n'est pas un nombre entier.

Définition 4 (implication)

Le symbole $\Rightarrow$ (**implique**) s'utilise entre deux énoncés mathématiques et indique que lorsque celui de gauche est vrai, alors celui de droite est aussi vrai. Il correspond à la phrase « si..., alors... ».

→**Exemple** : L'énoncé « si $x = 2$, alors $x^2 = 4$ » s'écrit « $x = 2 \Rightarrow x^2 = 4$ ».

Définition 5 (équivalence)

Le symbole $\Leftrightarrow$ (**est équivalent à**) s'utilise entre deux énoncés mathématiques et indique qu'ils sont simultanément vrais ou simultanément faux. Il correspond à la phrase « ... si et seulement si ... ».

→**Exemple** : L'énoncé « $x = 2$ si et seulement si $2x = 4$ » s'écrit « $x = 2 \Leftrightarrow 2x = 4$ ».

Définition 6 (Quantificateur universel)

Le symbole $\forall$ (**pour tout**, ou **quantificateur universel**) s'utilise pour déclarer qu'un énoncé mathématique est vrai pour tous les éléments d'un certain ensemble.

→**Exemple** : L'énoncé « Pour tout entier relatif n , le nombre $2n$ est pair » s'écrit « $\forall n \in \mathbb{Z}, 2n \text{ est pair}$ ».

Définition 7 (Quantificateur existentiel)

Le symbole $\exists$ (**il existe**, ou **quantificateur existentiel**) s'utilise pour déclarer qu'un énoncé mathématique est vrai pour au moins un élément d'un certain ensemble.

→**Exemple** : L'énoncé « L'équation $x^2 + x - 1 = 0$ admet une solution réelle » s'écrit « $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 + x - 1 = 0$ ».

En combinant ces symboles, on peut écrire de très nombreux énoncés mathématiques et formaliser de nombreuses notions. À titre d'illustration, la continuité d'une fonction réelle f s'écrit :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x, y \in \mathbb{R}, |x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

Chapitre 2: Rappels de calcul algébrique

Ce chapitre se concentre sur les règles de calculs des nombres, fractions, puissances et racines.

2.1) Priorité des opérations

Dans un calcul, l'ordre dans lequel les opérations sont effectuées est important. On effectue en priorité

1. Les calculs entre parenthèses, au-dessus ou en-dessous des barres de fractions et sous les racines,
2. Les applications de fonctions,
3. Les calculs de puissances,
4. Les multiplications et divisions,
5. Les additions et soustractions.

Lorsque deux opérations ont le même niveau de priorité, on les effectue de gauche à droite.

Exemple 8

On calcule $A = (1 - 2) \cos(\pi)^2 - \frac{7-3}{\sqrt{4}}$ dans l'ordre suivant :

$$\begin{aligned} A &= (1 - 2) \cos(\pi)^2 - \frac{7-3}{\sqrt{4}} = (-1) \cos(\pi)^2 - \frac{4}{\sqrt{4}} \\ &= (-1) \cos(\pi)^2 - \frac{4}{\sqrt{4}} = (-1)(-1)^2 - \frac{4}{2} \\ &= (-1)(-1)^2 - \frac{4}{2} = (-1) \times 1 - \frac{4}{2} \\ &= (-1) \times 1 - \frac{4}{2} = (-1) - 2 \\ &= (-1) - 2 = -3. \end{aligned}$$

2.2) Fractions

Définition 9 (Fraction)

Soient $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}^*$. La **fraction** « a sur b » se note $\frac{a}{b}$ et est égale au résultat de la division de a par b .

→ **Exemple** : $\frac{3}{4} = 0,75$, $\frac{12}{3} = 4$, $\frac{0}{67} = 0$.

Nous avons les règles de calcul suivantes, très utiles en pratique.

Proposition 10

Soient $a, c \in \mathbb{R}$ et $b, d \in \mathbb{R}^*$:

$$\begin{aligned} (i) \quad & \frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a+c}{b} \\ (ii) \quad & \frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd} \\ (iii) \quad & \frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd} \\ (iv) \quad & \frac{a}{b} = a \times \frac{1}{b} \end{aligned}$$

Remarque 11

On peut empiler des fractions. Dans ce cas, il peut y avoir une ambiguïté sur l'ordre des opérations : on doit indiquer par une barre de fraction plus longue celle qui se fait en premier, et celle-ci doit se situer au niveau du symbole « = ». Par exemple :

$$\frac{\frac{1}{2}}{3} = \frac{1}{6} \neq \frac{3}{2} = \frac{1}{\frac{2}{3}}.$$

Pour pouvoir comparer des fractions entre elles, on les ramène au même dénominateur.

→ **Exemple** : La fraction $\frac{9}{7}$ est supérieure que la fraction $\frac{17}{14}$: en effet, $\frac{9}{7} = \frac{18}{14}$. Les deux fractions ayant le même dénominateur, on compare les numérateurs : $18 > 17$ donc $\frac{18}{14} > \frac{17}{14}$.

2.3) Puissances

Définition 12 (Élévation à une puissance entière positive)

Soit $a \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. On définit « a puissance n » le nombre obtenu en multipliant le nombre a avec lui-même n fois :

$$a^n = \underbrace{a \times a \times \cdots \times a}_{n \text{ fois le nombre } a}.$$

Lorsque a est non nul, on définit aussi $a^0 = 1$.

Exemples 13

$$3^1 = 3$$

$$3^2 = 3 \times 3 = 9$$

$$3^3 = 3 \times 3 \times 3 = 27$$

$$3^4 = 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 81$$

Définition 14 (Élévation à une puissance entière strictement négative)

Soit $a \in \mathbb{R}^*$ et $n \in \mathbb{N}^*$. On définit « a puissance $-n$ » comme étant l'inverse de a^n :

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}.$$

Remarque 15

Pour $n = 1$, on obtient la formule très utile : $a^{-1} = \frac{1}{a}$.

→ **Exemple** : On a $2^{-4} = \frac{1}{16}$.

Proposition 16 (Opérations sur les puissances)

Soient $n, m \in \mathbb{Z}$ et $a, b \in \mathbb{R}^*$. On a :

$$a^n \times a^m = a^{n+m}; \quad a^b \times b^n = (a \times b)^n; \quad (a^n)^m = a^{n \times m}; \quad \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}; \quad \frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}.$$

→ **Exemple** : On a : $\frac{2^2 \times 3^2}{6^{-1}} = \frac{6^2}{6^{-1}} = 6^{2-(-1)} = 6^3 = 216$.

2.4) Racines et puissances fractionnaires

Définition 17 (racine n -ième)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $a \in \mathbb{R}_+$. L'équation $x^n = a$ admet une unique solution positive ou nulle, qu'on appelle la **racine n -ième** de a et qu'on note $\sqrt[n]{a}$.

Remarques 18

- Si $n = 1$, la racine première de a est a : $\sqrt[1]{a} = a$.
- Si $n = 2$, la racine deuxième (plus souvent appelée racine carrée) de a est $\sqrt{a}$: $\sqrt[2]{a} = \sqrt{a}$.

→ **Exemple** : Puisque $2^3 = 8$, alors $\sqrt[3]{8} = 2$.

Définition 19 (Puissance fractionnaire)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $a \in \mathbb{R}_+$. On note $a^{\frac{1}{n}}$ la racine n -ième de a :

$$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}.$$

Si de plus $m \in \mathbb{Z}$, on note simplement par $a^{\frac{m}{n}}$ le nombre $\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m$.

→ **Exemple** : Dans l'exemple précédent, on a $8^{\frac{1}{3}} = 2$. On en déduit que $8^{\frac{4}{3}} = 16$.

Proposition 20

Les règles de calcul de la proposition 16 sont encore valables si $n, m \in \mathbb{Q}$.

Exemple 21

On a :

$$\frac{5^{\frac{3}{2}}}{5^{-\frac{1}{2}}} = 5^{\frac{3}{2} + \frac{1}{2}} = 25.$$

Dans le cas des racines carrées, on préfère parfois garder le symbole $\sqrt{}$ plutôt que d'utiliser l'élevation à la puissance $\frac{1}{2}$. Les règles sur les calculs de puissances donnent les résultats suivants :

Proposition 22

Soient $a, b \in \mathbb{R}_+$.

$$\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{a \times b}; \quad \sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}; \quad (\sqrt{a})^2 = a.$$

De plus, on a ces propriétés utiles

Proposition 23

Soient $a, b \in \mathbb{R}_+$ et $c \in \mathbb{R}$.

$$\sqrt{c^2} = |c|; \quad a \leq b \Leftrightarrow \sqrt{a} \leq \sqrt{b}; \quad a = b \Leftrightarrow \sqrt{a} = \sqrt{b}.$$

Exemple 24

On peut estimer $\sqrt{67}$:

- $64 < 67$ donc $\sqrt{64} < \sqrt{67}$ donc $8 < \sqrt{67}$,
- de même, $67 < 81$ donc $\sqrt{67} < \sqrt{81}$ donc $\sqrt{67} < 9$.

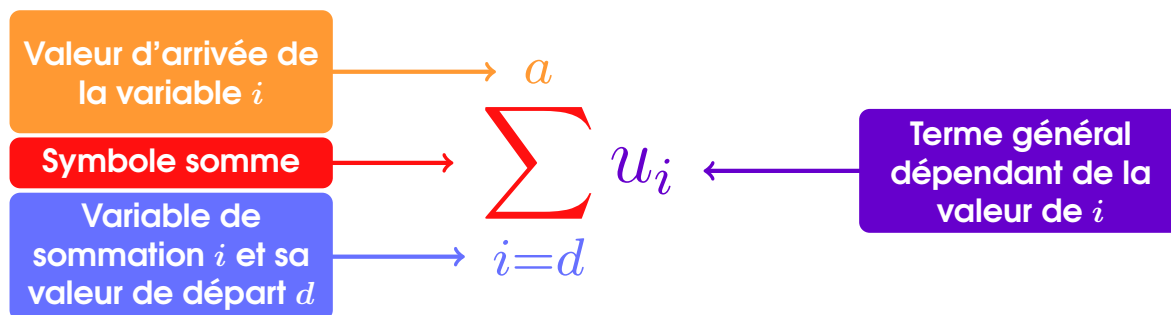
Ainsi, $\sqrt{67}$ est un réel strictement compris entre 8 et 9.

Chapitre 3: Sommes

Ce chapitre introduit le symbole $\sum$, utilisé pour décrire et calculer efficacement certaines longues sommes.

3.1) Utilisation du symbole $\sum$

Le symbole $\sum$ est utilisé pour pouvoir décrire de manière concise, rigoureuse et sans ambiguïté de longues sommes. Il comporte 4 parties :



La variable de sommation, i , est une **variable muette** : on peut choisir n'importe quelle lettre qui n'est pas déjà utilisée à la place :

$$\sum_{i=d}^a u_i = \sum_{k=d}^a u_k = \sum_{\xi=d}^a u_{\xi} = \dots \quad \cancel{\sum_{a=d}^a u_a;} \quad \cancel{\sum_{d=d}^a u_a.}$$

Exemples 25

- Pour noter la (longue) somme :

$$4^2 + 5^2 + 6^2 + 7^2 + 8^2 + 9^2 + 10^2 + 11^2 + 12^2 + 13^2 + 14^2 + 15^2 + 16^2 + 17^2 + 18^2 + 19^2,$$

on utilise le symbole somme de la manière suivante : le terme général est de la forme i^2 avec i un entier qui varie du point de départ $d = 4$ au point d'arrivée $a = 19$. Cette somme s'écrit donc :

$$\sum_{i=4}^{19} i^2.$$

- La somme :

$$2 + 4 + 6 + 8 + 10 + 12 + 14 + 16$$

se note de manière concise

$$\sum_{i=1}^8 2i.$$

- Si $x \in \mathbb{R}^*$, la somme

$$\cos(x^{-3}) + \cos(x^{-2}) + \cos(x^{-1}) + \cos(x^0) + \cos(x^1) + \cos(x^2) + \cos(x^3) + \cos(x^4)$$

se note

$$\sum_{i=-3}^4 \cos(x^i).$$

Définition 26 (Moyenne)

Soient $x_1, \dots, x_n$ une suite de n nombres. Leur **moyenne arithmétique** est le nombre noté $\bar{x}$ défini par :

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}.$$

Si on a de plus une suite de n coefficients strictement positifs $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, la **moyenne pondérée** de la série statistique $(x_1, \lambda_1), \dots, (x_n, \lambda_n)$ est le nombre toujours noté $\bar{x}$ défini par :

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i}{\sum_{i=1}^n \lambda_i}.$$

En particulier, une moyenne arithmétique est une moyenne pondérée où tous les coefficients λ_i sont égaux à 1.

Exemple 27

Un étudiant a eu 4 notes ce semestre :

- un 12/20 coefficient 2,
- un 32/40 coefficient 3,
- un 5/10 coefficient 0,5,
- un 14/20 coefficient 1.

Sa moyenne (réel compris entre $0 = 0/20$ et $1 = 20/20$), pondérée par les coefficients de ces notes, est donc :

$$\frac{2 \frac{12}{20} + 0,5 \frac{5}{10} + 3 \frac{32}{40} + 1 \frac{14}{20}}{2 + 0,5 + 3 + 1} = 0,7.$$

Ramenée à 20, sa moyenne au semestre est $20 \times 0,7 = 14$.

3.2) Opérations sur les sommes

Proposition 28 (Propriétés de la somme)

Pour tous nombres réels u_i, v_i, λ , pour tous entiers $d \leq a' \leq a$, on a :

1. **Somme constante** : $\sum_{i=d}^a 1 = d - a + 1$,
2. **Linéarité** : $\lambda \left(\sum_{i=d}^a u_i \right) + \left(\sum_{i=d}^a v_i \right) = \sum_{i=d}^a (\lambda u_i + v_i)$,
3. **Relation de CHASLES** : $\sum_{i=d}^a u_i = \left(\sum_{i=d}^{a'} u_i \right) + \left(\sum_{i=a'+1}^a u_i \right)$,
4. **Décalage d'indice** : $\sum_{i=d}^a u_i = \sum_{i=d-1}^{a-1} u_{i+1}$ et $\sum_{i=d}^a u_i = \sum_{i=d+1}^{a+1} u_{i-1}$,
5. **Retournement** : $\sum_{i=d}^a u_i = \sum_{i=d}^a u_{d+a-i}$,

Exemple 29 (La légende du petit GAUSS W)

On veut calculer $S = \sum_{k=1}^n k$, la somme des n premiers entiers strictement positifs. On va utiliser de nombreuses propriétés du symbole $\sum$. Par retournement, on a :

$$\sum_{k=1}^n k = \sum_{k=1}^n (n+1-k),$$

Alors, par linéarité, relation de CHASLES et somme constante :

$$\begin{aligned} 2S &= S + S \\ &= \left(\sum_{k=1}^n k \right) + \left(\sum_{k=1}^n (n+1-k) \right) \\ &= \sum_{k=1}^n (k + (n+1-k)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k=1}^n (n+1) \\
&= n \sum_{k=1}^n 1 \\
&= (n+1)n.
\end{aligned}$$

En divisant par 2, on obtient

$$\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Définition 30 (Somme télescopique)

On dit qu'une somme $\sum_{i=d}^a u_i$ est **télescopique** si pour tout i , on peut écrire u_i de la forme $a_i - a_{i+1}$ pour une certaine suite de nombres $(a_i)_i$:

$$\sum_{i=d}^a (a_i - a_{i+1}).$$

Proposition 31

Le calcul d'une somme télescopique est immédiat :

$$\sum_{i=d}^a (a_i - a_{i+1}) = a_d - a_{a+1}.$$

Preuve 32

On utilise de manière astucieuse la linéarité, les décalages d'indices et la relation de CHASLES sur les sommes.

$$\begin{aligned}
\sum_{i=d}^a (a_i - a_{i+1}) &= \sum_{i=d}^a a_i - \sum_{i=d}^a a_{i+1} \\
&= \sum_{i=d}^a a_i - \sum_{i=d+1}^{a+1} a_i \\
&= \sum_{i=d}^d a_i + \sum_{i=d+1}^a a_i - \left(\sum_{i=d+1}^a a_i + \sum_{i=a+1}^{a+1} a_i \right) \\
&= a_d + \sum_{i=d+1}^a a_i - \sum_{i=d+1}^a a_i - a_{a+1} \\
&= a_d + \cancel{\sum_{i=d+1}^a a_i} - \cancel{\sum_{i=d+1}^a a_i} - a_{a+1} \\
&= a_d - a_{a+1}.
\end{aligned}$$

Exemple 33

On veut calculer la somme $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)}$. On remarque que $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$. Ainsi :

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = \frac{1}{1} - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1}.$$

Remarque 34

On est en train de calculer avec beaucoup d'aisance des sommes très compliquées !

3.3) Sommes remarquables

Proposition 35 (Somme des termes d'une suite arithmétique)

Soit $(u_n)_n$ une suite **arithmétique** de premier terme u_0 et de raison $a \in \mathbb{R} : u_n = na + u_0$. Alors

$$\sum_{k=d}^a u_k = (d - a + 1) \frac{u_d + u_a}{2}.$$

Remarque 36

« nombre de termes fois la moyenne entre le premier et le dernier »

Exemple 37

On retrouve grâce à cette formule la somme constante (en prenant $a = 0$) et la somme des premiers entiers naturels (en prenant $a = 1$ et $u_0 = 0$).

Proposition 38 (Somme des termes d'une suite géométrique)

Soit $(u_n)_n$ une suite **géométrique** de premier terme u_0 et de raison $r \in \mathbb{R} \setminus \{1\} : u_n = u_0 r^n$. Alors

$$\sum_{k=d}^a u_k = \frac{u_d - u_{a+1}}{1 - r}.$$

Remarque 39

« premier qui y est moins premier qui n'y est pas sur 1 moins la raison »

Exemple 40

On demande ce qu'on préfère entre gagner un million d'euro aujourd'hui, ou gagner un centime aujourd'hui, deux centimes demain, quatre centimes après-demain, etc pendant un mois de 30 jours. Quelle est l'option la plus rentable ?

Le nombre de centimes gagnés par la deuxième option est la somme de 30 termes

$$2^0 + 2^1 + 2^2 + \cdots + 2^{29}.$$

C'est une suite géométrique de premier terme 1 et de raison 2. On peut alors appliquer la formule du calcul de la somme des termes d'une suite géométrique :

$$2^0 + 2^1 + 2^2 + \cdots + 2^{29} = \sum_{k=0}^{29} 2^k = \frac{2^0 - 2^{30}}{1 - 2} = 2^{30} - 1.$$

Quand on fait le calcul à la calculatrice, on trouve 1073741823 : on gagne au total 10737418, 23 euros, soit presque 11 millions d'euros ! Par contre, si on nous propose la deuxième option uniquement sur une période de trois semaines (21 jours), on n'aura au total que 20971, 51 euros, c'est bien moins qu'un million ! Heureusement que nous savons faire des calculs de sommes de termes de suites géométriques pour ne pas se faire avoir 😊.

Chapitre 4 : Formule du binôme de Newton

La formule du binôme de NEWTON généralise la formule classique $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ pour des plus grandes puissances.

4.1) Coefficients binomiaux et triangle de Pascal

Définition 41 (Triangle de PASCAL)

Le **triangle de PASCAL** est un diagramme en forme de triangle où chaque ligne contient un nombre de plus que la précédente et :

- Le premier et dernier entier de chaque ligne est 1,
- Chaque autre entier est la somme des deux qui lui sont juste au dessus.

Exemple 42

Voici les 6 premières lignes du triangle de PASCAL :

Ligne 0 :	1
Ligne 1 :	1 1
Ligne 2 :	1 2 1
Ligne 3 :	1 3 3 1
Ligne 4 :	1 4 6 4 1
Ligne 5 :	1 5 10 10 5 1

On remarque bien la structure énoncée dans la définition. Par exemple, le premier 5 apparaissant à la dernière ligne est bien la somme de 1 et 4 qui lui sont juste au dessus.

→ **Remarque** : Pour simplifier la suite, on dit que le premier nombre qui apparaît à chaque ligne est le zéroième.

Définition 43 (Coefficient binomial)

Dans le triangle de PASCAL, les nombres qui y apparaissent s'appellent des **coefficients binomiaux**. Le k -ième nombre apparaissant à la n -ième ligne est noté $\binom{n}{k}$ et se lit « **k parmi n** ».

→ **Exemple** : Comme le zéroième et le n -ième nombre de la ligne n vaut toujours 1, on a toujours $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$.

Remarque 44

Il n'y a pas de barre de fraction entre n et k , ce n'est pas une fraction ! Il faut également absolument laisser les parenthèses.

L'appellation « k parmi n » résulte du résultat suivant.

Proposition 45

Si $n \in \mathbb{N}$ et $0 \leq k \leq n$, le nombre $\binom{n}{k}$ correspond au nombre de toutes les différentes façons de choisir k éléments parmi un ensemble à n éléments.

Exemple 46

Une personne possède une collection de 5 figurines, mais n'a de la place pour en placer que 3 sur son étagère. Ceci laisse donc à cette personne $\binom{5}{3} = 10$ possibilités pour choisir trois figurines parmi ses cinq.

4.2) Binôme de Newton

Théorème 47 (Formule du binôme de NEWTON)

Soient a et b deux réels et $n \in \mathbb{N}$. L'expression $(a + b)^n$ se développe de la façon suivante :

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

Exemple 48

On retrouve la fameuse identité remarquable : $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$. On en obtient plein de nouvelles autres : $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$, ...

Remarque 49

En pratique, pour développer $(a + b)^n$, on part de $a^n b^0$, et à chaque terme qui suit on diminue de 1 la puissance sur a , on augmente de 1 la puissance sur b , et on met les coefficients donnés par le triangle de PASCAL.

Exemple 50

La 5-ème ligne du triangle de PASCAL est **1 5 10 10 5 1**, on a donc

$$\begin{aligned} (a + b)^5 &= \mathbf{1} \times a^5 b^0 + \mathbf{5} \times a^4 b^1 + \mathbf{10} \times a^3 b^2 + \mathbf{10} \times a^2 b^3 + \mathbf{5} \times a^1 b^4 + \mathbf{1} \times a^0 b^5 \\ &= a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5. \end{aligned}$$

Corollaire 51 (Identités remarquables)

Pour tous nombres réels a et b , on a

- $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$,
- $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$,
- $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$.

Chapitre 5: Équations et inéquations

Ce chapitre est destiné à l'étude de diverses équations et inéquations classiques en mathématiques.

5.1) Équations du premier degré

Définition 52 (Équation du premier degré)

Soit $a \in \mathbb{R}^*$ et $b \in \mathbb{R}$. On appelle **équation du premier degré** une équation d'inconnue $x \in \mathbb{R}$ de la forme

$$ax + b = 0.$$

Proposition 53

Une équation du premier degré $ax + b = 0$ admet toujours une unique solution qui est $x = -\frac{b}{a}$.

→ **Exemple** : La solution de l'équation $12x - 3 = 0$ est $x = \frac{1}{4}$.

5.2) Équations du second degré

Définition 54 (Équation du second degré)

Soit $a \in \mathbb{R}^*$ et $b, c \in \mathbb{R}$. On appelle **équation du second degré** une équation d'inconnue $x \in \mathbb{R}$ de la forme

$$ax^2 + bx + c = 0.$$

Contrairement aux équations du premier degré, il n'y a pas toujours de solutions réelles aux équations du second degré. La définition suivante permet de savoir quand est-ce qu'il y a des solutions.

Définition 55 (Discriminant)

Le **discriminant** d'une équation du second degré $ax^2 + bx + c = 0$ est le nombre noté Δ qui vaut

$$\Delta = b^2 - 4ac.$$

Exemples 56

- Le discriminant de l'équation $x^2 + x + 1 = 0$ est $\Delta = 1^2 - 4 \times 1 \times 1 = -3$.
- Le discriminant de l'équation $2x^2 - x - 1 = 0$ est $\Delta = (-1)^2 - 4 \times (-1) \times 2 = 9$.

Proposition 57

Une équation du second degré $ax^2 + bx + c = 0$ admet

1. aucune solution si $\Delta < 0$,
2. une seule solution si $\Delta = 0$, il s'agit de $x = -\frac{b}{2a}$,
3. deux solutions si $\Delta > 0$, qui sont

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}.$$

Exemples 58

En reprenant les équations des exemples 56.

- Comme le discriminant de l'équation $x^2 + x + 1 = 0$ est $\Delta = -3 < 0$, cette équation n'a pas de solutions.
- Comme le discriminant de l'équation $2x^2 - x - 1 = 0$ est $\Delta = 9 > 0$, cette équation admet

deux solutions qui sont

$$x_1 = \frac{-(-1) + \sqrt{9}}{2 \times 2} = 1 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-(-1) - \sqrt{9}}{2 \times 2} = -\frac{1}{2}.$$

5.3) Exponentielles et logarithmes

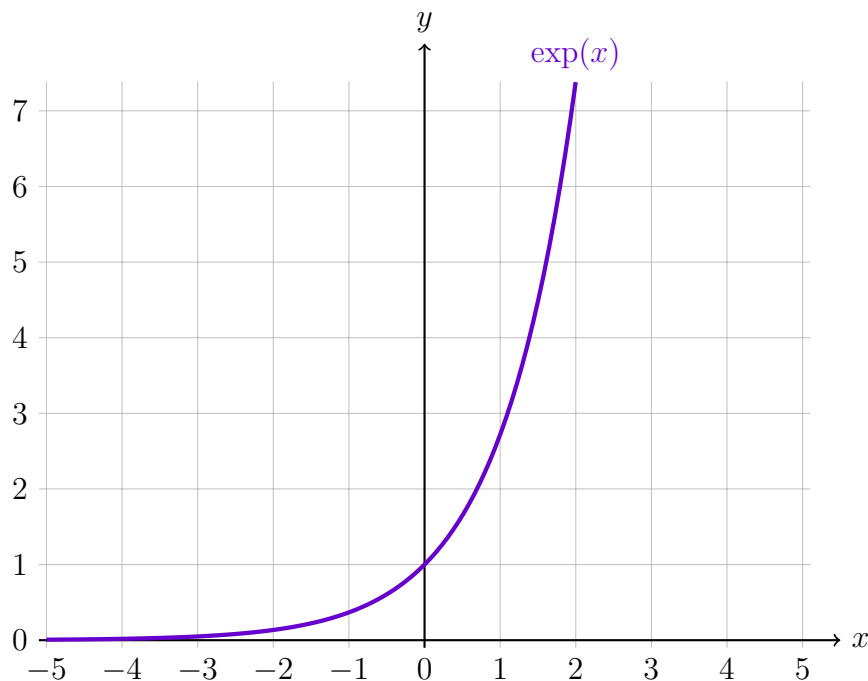
Définition 59 (Fonction exponentielle)

La **fonction exponentielle** (ou simplement l'**exponentielle**) est la fonction $\exp$ définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \exp(x) = e^x$$

où $e \approx 2,718$.

Voici le graphe de la fonction exponentielle :



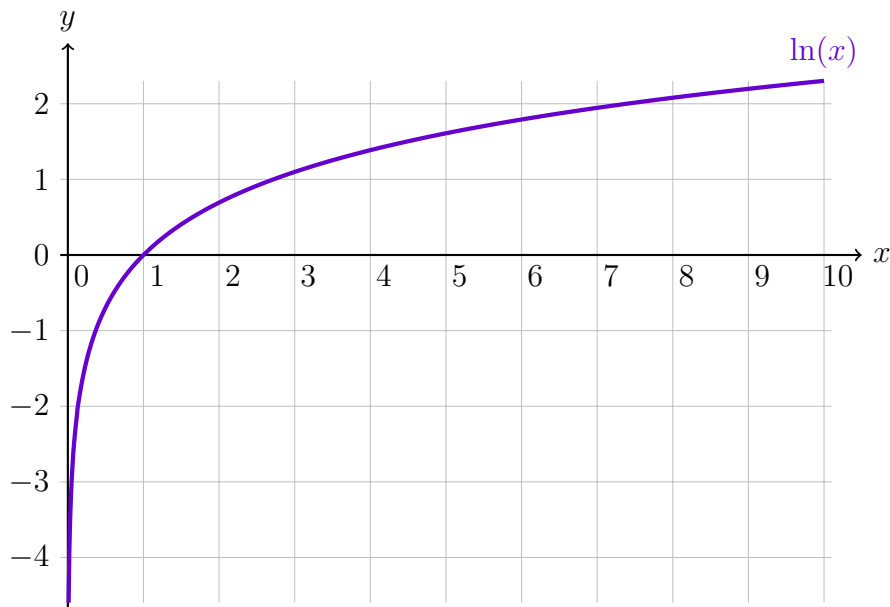
Définition 60 (Logarithme)

Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. Le **logarithme népérien** (ou simplement **logarithme**) de x est l'unique nombre $y \in \mathbb{R}$ tel que $\exp(y) = x$. On le note $\ln(x)$.

→ **Exemple** : Puisque $\exp(0) = 1$, alors $\ln(1) = 0$. Puisque $\exp(8) = e^8$, alors $\ln(e^8) = 8$.

→ **Remarque** : Le lien entre $\exp(x)$ et $\ln(x)$ est le même que celui entre x^2 et $\sqrt{x}$.

Voici le graphe de la fonction logarithme népérien :



Proposition 61

La fonction logarithme népérien vérifie les propriétés suivantes pour tout $x, y \in \mathbb{R}_+^*$:

1. $\ln(1) = 0$ et $\ln(e) = 1$,
2. $\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$,
3. $\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln(x) - \ln(y)$,
4. $\ln(x^n) = n \ln(x)$.

→ **Exemple** : $\ln(16) = 2 \ln(4) = 4 \ln(2)$, $\ln\left(\frac{1}{25}\right) = -\ln(25) = -2 \ln(5)$.

5.4) Inégalités

Proposition 62 (Manipulation des inégalités)

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a \leq b$.

1. Pour tout $c \in \mathbb{R}$, $a + c \leq b + c$,
2. Pour tout $c \in \mathbb{R}_+$, $ac \leq bc$,
3. Pour tout $c \in \mathbb{R}_-$, $ac \geq bc$,
4. Si a et b ont le même signe, $\frac{1}{a} \geq \frac{1}{b}$,
5. $\exp(a) \leq \exp(b)$,
6. Si a et b sont strictement positifs, $\ln(a) \leq \ln(b)$,
7. Si a et b sont positifs et $r \in \mathbb{Q}_+$, $a^r \leq b^r$,
8. Si a et b sont strictement positifs et $r \in \mathbb{Q}_-$, $a^r \geq b^r$.

→ **Exemple** : On a $\sqrt{42} \leq \sqrt{67}$ en appliquant le point 7 avec $r = \frac{1}{2}$, $a = 42$ et $b = 67$.

Définition 63 (Intervalles)

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a \leq b$. On définit quatre **intervalles** d'extrémités a et b :

1. $[a, b]$: c'est l'ensemble de tous les entiers compris entre a (inclus) et b (inclus).
2. $]a, b]$: c'est l'ensemble de tous les entiers compris entre a (exclus) et b (inclus).
3. $[a, b[$: c'est l'ensemble de tous les entiers compris entre a (inclus) et b (exclus).

4. $]a, b[$: c'est l'ensemble de tous les entiers compris entre a (exclus) et b (exclus).

Pour savoir si un nombre appartient à un intervalle, on vérifie une chaîne d'inégalités.

Proposition 64

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a \leq b$.

1. $x \in [a, b]$ si et seulement si $a \leq x \leq b$,
2. $x \in]a, b]$ si et seulement si $a < x \leq b$,
3. $x \in [a, b[$ si et seulement si $a \leq x < b$,
4. $x \in]a, b[$ si et seulement si $a < x < b$.

Exemples 65

- Il n'y a que 4 dans l'intervalle $[4, 4]$, en effet, c'est le seul nombre x qui vérifie $4 \leq x \leq 4$.
- Il n'y a aucun nombre dans aucun des intervalles $]4, 4]$, $[4, 4[$ et $]4, 4[$. En effet, aucun nombre x ne vérifie $4 < x \leq 4$, $4 \leq x < 4$ ou $4 < x < 4$.
- L'intervalle $[0, 1[$ est composé de tous les nombres dont l'écriture décimale (éventuellement infinie) commence par « 0, », par exemple 0,25, 0,3333..., 0,1234, etc.

5.5) Valeur absolue

Définition 66 (Valeur absolue)

Soit $x \in \mathbb{R}$. La **valeur absolue** de x est le nombre noté $|x|$ qui est égal à x si $x \geq 0$ et à $-x$ si $x \neq 0$.

→ **Exemple** : $|3| = 3$, $|-3| = 3$, $|2 - 5| = 3$, $|- \pi| = \pi$.

Proposition 67

Pour tout $x, y \in \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}_+$, les propriétés suivantes sont vérifiées :

1. $|x| = a$ si et seulement si $x = \pm a$.
2. $|x| < a$ si et seulement si $-a < x < a$ si et seulement si $x \in]-a, a[$,
3. $|x| \leq a$ si et seulement si $-a \leq x \leq a$ si et seulement si $x \in [-a, a]$,
4. $|x| > a$ si et seulement si $x < -a$ ou $a < x$,
5. $|x| \geq a$ si et seulement si $x \leq -a$ ou $a \leq x$,
6. $\sqrt{x^2} = |x|$,

Exemple 68

Quels sont tous les réels $x \in \mathbb{R}$ qui vérifient $|x - 4| \leq 5$? Par le point 3 de la proposition précédente, cette inégalité se réécrit

$$-5 \leq x - 4 \leq 5$$

autrement dit

$$-1 \leq x \leq 9.$$

Les nombres qui vérifient $|x - 4| \leq 5$ sont donc tous les nombres de l'intervalle $[-1, 9]$.

Définition 69 (Distance)

Soient $x, y \in \mathbb{R}$. On appelle la **distance** entre x et y le nombre $|x - y|$.

→**Remarque** : C'est une notion intuitive ! La distance entre deux nombre est la taille de l'écart entre les deux, mais sans le signe.

→**Exemple** : Dans l'exemple précédent, on a montré que l'ensemble des nombres à distance au plus 5 (inclus) de 4 est $[-1, 9]$.

Chapitre 6: Tableaux utiles

6.1) Tableau des lettres grecques

En mathématiques (et plus généralement en sciences) il est courant d'utiliser des lettres grecques pour certaines variables, fonctions et quantités. Voici un tableau des 24 lettres grecques.

Majuscule	Minuscule	Nom	Majuscule	Minuscule	Nom
A	α	Alpha	N	ν	Nu
B	β	Bêta	Ξ	ξ	Xi
Γ	γ	Gamma	O	o	Omicron
Δ	δ	Delta	Π	π	Pi
E	ε	Epsilon	P	ρ	Rho
Z	ζ	Zêta	Σ	σ	Sigma
H	η	Êta	T	τ	Tau
Θ	θ	Thêta	Υ	υ	Upsilon
I	ι	Iota	Φ	φ	Phi
K	κ	Kappa	X	χ	Chi
Λ	λ	Lambda	Ψ	ψ	Psi
M	μ	Mu	Ω	ω	Oméga

6.2) Préfixes du Système International d'Unité

En sciences, il est courant de faire face à de très grands nombres ou a de très petits nombres. On utilise des préfixes pour indiquer l'ordre de grandeur d'une quantité.

Préfixe		Nombre correspondant		Exemple
Sym.	Nom	Puis. de 10	Notation décimale	
P	Péta	10^{15}	1 000 000 000 000 000	Une année lumière ($\approx 9,5\text{Pm}$)
T	Téra	10^{12}	1 000 000 000 000	Capacité d'un disque dur ($\approx 1\text{To}$)
G	Giga	10^9	1 000 000 000	Âge de l'univers ($\approx 13,8\text{Gan}$)
M	Méga	10^6	1 000 000	Appareils photos ($\approx 16\text{MPx}$)
k	Kilo	10^3	1 000	Puissance d'un radiateur ($\approx 1,5\text{kW}$)
h	Hecto	10^2	100	Eau utilisée par personne par jour ($\approx 1,5\text{hL}$)
da	Déca	10^1	10	Longueur d'une baleine bleue ($\approx 3\text{dam}$)
	Unité	10^0	1	
d	Déci	10^{-1}	0,1	Longueur d'une règle ($\approx 1\text{dm}$)
c	Centi	10^{-2}	0,01	Volume d'une canette ($\approx 33\text{cL}$)
m	Milli	10^{-3}	0,001	Volume standard d'une cuillère à café (5mL)
μ	Micro	10^{-6}	0,000 001	Taille d'une cellule procaryote ($\approx 3\mu\text{m}$)
n	Nano	10^{-9}	0,000 000 001	Lumière visible ($\approx 600\text{nm}$)
p	Pico	10^{-12}	0,000 000 000 001	Diamètre d'un atome ($\approx 150\text{pm}$)
f	Femto	10^{-15}	0,000 000 000 000 001	Diamètre d'un proton ($\approx 0,8\text{fm}$)